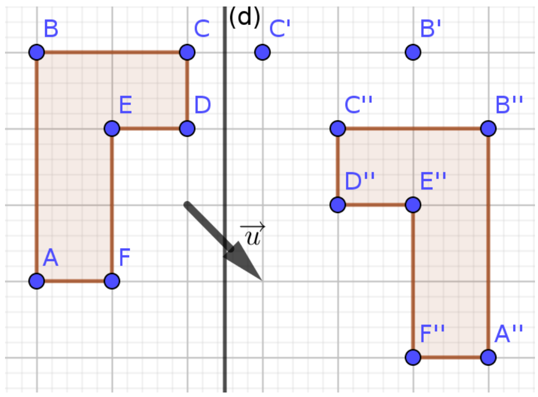
1) Rappels et compléments sur les transformations.

Rappel : les transformations utilisées jusqu'à présent sont :

- des symétries axiales (aussi appelées réflexions) (préciser le nom de l'axe : « la symétrie axiale d'axe... »)
- des symétrie centrales (aussi appelées demi-tours) (préciser le nom du centre : « la symétrie centrale de centre... »)
- des translation (préciser le nom du vecteur : « la translation de vecteur... »)
- des rotation (préciser le centre, le sens, l'angle : « la rotation de centre … et d'angle …, dans le sens ...(horaire ou antihoraire) »)

Nouveauté : La **<u>réflexion glissée d'axe (d) et de vecteur</u>** $\vec{u}$ est la composition de la symétrie axiale d'axe (d) suivie de la translation de vecteur $\vec{u}$.

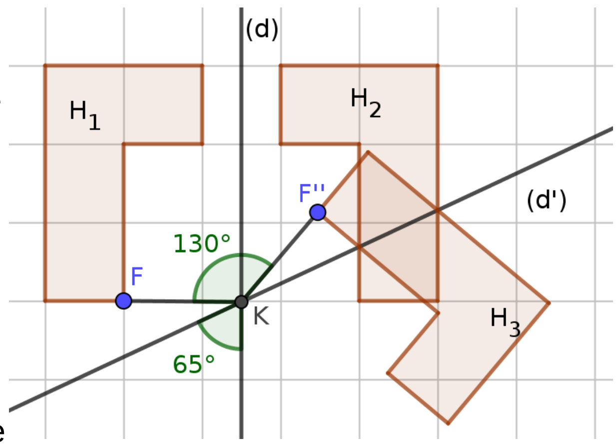
Dans la figure ci-contre, A''B''C''D''E''F'' est l'image de ABCDEF par la réflexion glissée d'axe (d) et de vecteur $\vec{u}$



Propriété : composition de deux translations.
La composée d'une translation de vecteur $\vec{u}$ suivie d'une translation de vecteur $\vec{v}$ est une translation dont le vecteur est $\vec{u}+\vec{v}$.

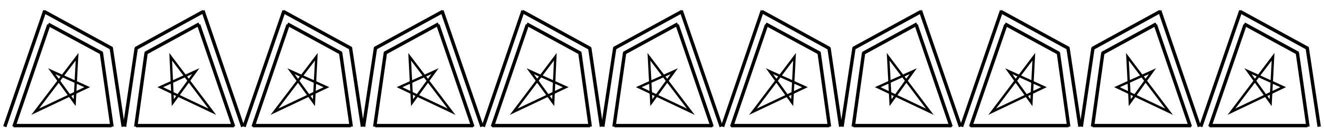
Remarque : cette propriété est évidente…

Propriété : composition de deux réflexions.
La composée d'une symétrie d'axe (d) suivie d'une symétrie d'axe (d') est une rotation dont le centre est le point d'intersection entre les axes (d) et (d') ; dont l'angle est égal à deux fois l'angle entre les deux axes et dont le sens est celui allant du premier axe vers le second, dans le même sens que celui choisi pour mesurer l'angle.



Sur la figure ci-contre, H_2 est l'image de H_1 par la symétrie d'axe (d) et H_3 est l'image de H_2 par la symétrie d'axe (d'). L'angle entre les deux axes mesure 65°. Pour mesurer cet angle, on passe de (d) à (d') en tournant dans le sens anti-horaire.
On peut donc obtenir H_3 directement à partir de H_1 en effectuant la rotation de centre K, de sens anti-horaire et d'angle 2x65°=130°.

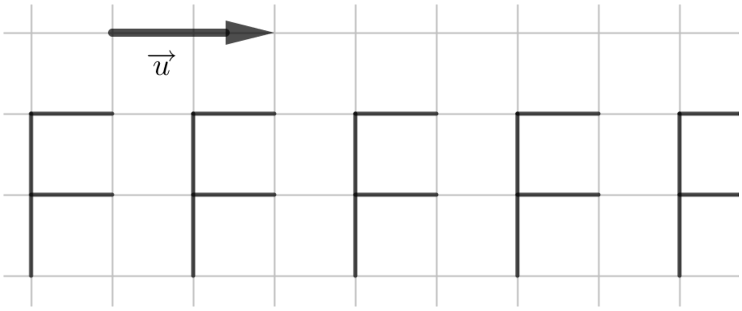
Remarque : cette propriété est nettement moins évidente ! Par contre, elle est assez inutile dans le cadre du programme de cette année...



2) Frises.

Introduction : si on cherche une figure qui soit invariante par une translation de vecteur $\vec{u}$, on comprend vite que cette figure est obligatoirement illimitée dans la direction du vecteur $\vec{u}$ et dans les deux sens.

Dans la figure ci-contre, il faut imaginer que les « F » se répètent indéfiniment vers la droite et vers la gauche. Si on effectue la translation de vecteur $\vec{u}$, chaque « F » ira prendre la place du suivant sans qu'il n'y en ait de premier ni de dernier. La figure sera donc globalement invariante.



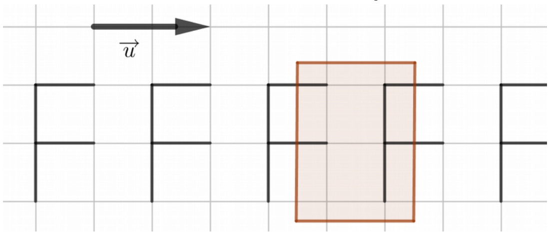
Définition : une **frise** est une figure géométrique pour laquelle :
- il existe une translation la laissant invariante
- il existe un vecteur $\vec{u}$ tel que : si une autre translation laisse la frise invariante, alors cette translation a pour vecteur un multiple (entier) de $\vec{u}$

Remarque 1 : cette définition est compliquée… Il n'est pas forcément utile de la connaître par cœur. La deuxième condition est là pour empêcher certains objets trop simples d'être des frises. Par exemple une droite est invariante par n'importe quel translation dont le vecteur est dans sa direction. Ce n'est donc pas une frise car la 2^e^ condition n'est pas respectée.

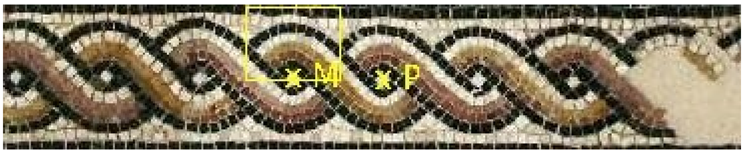
Remarque 2 : dans l'image ci-dessus, la frise est également invariante par les vecteurs $2\vec{u}$, $-3\vec{u}$, $17\vec{u}$ … Tous ces vecteurs sont des multiples entiers de $\vec{u}$.

Définitions (suite) : un **vecteur minimal** de la frise est un vecteur par la translation duquel la frise est invariante et dont la longueur est minimale. Une frise a deux vecteurs minimaux. Sur la figure ci-dessus, c'est le vecteur $\vec{u}$ et le vecteur $-\vec{u}$.

Une **figure de base** ou **motif élémentaire** de la frise est une partie de la frise qui permet de reconstruire toute la frise grâce aux transformations laissant la frise invariante. Cette partie doit être la plus petite possible (minimale au sens de l'inclusion).
Sur la figure ci-dessus, n'importe lequel des « F » constitue un motif élémentaire. Voici encadré un autre choix possible pour une figure de base de la frise :



On demande souvent de faire l'analyse d'une frise : retrouver toutes les transformations la laissant invariante et retrouver une figure de base.



Par exemple dans cette frise de l'époque romaine extraite d'une mosaïque conservée au musée de Saint-Romain-en-Gal, on peut choisir comme figure de base la zone encadrée autour du point M (si on ne prend pas en compte les nuances de marron dans les entrelacs). La frise est invariante par demi-tour autour du point M et par les translations de vecteurs multiples de $\overrightarrow{MP}$. En partant de la figure de base, on peut reconstituer toute la frise grâce à cette symétrie de centre M et à des translations répétées de vecteur $\overrightarrow{MP}$ ou $\overrightarrow{PM}$.

3) Différents types de frises.

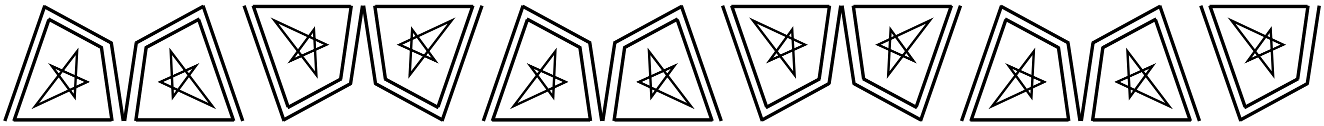
Un frise étant donnée, quelles peuvent être les transformations la laissant invariante ?

- symétries axiales : si une frise est invariante par symétrie axiale, alors l’axe est obligatoirement parallèle ou perpendiculaire à la direction de la frise
- symétries centrales / rotations : le centre est obligatoirement au milieu de la largeur de la frise et le seul angle possible est 180° (demi-tour)
- translations : bien sûr, il y a *obligatoirement* des translations parmi les transformations laissant une frise invariante. Leurs vecteurs sont tous multiples d’un vecteur minimal.

Remarque sur le motif élémentaire : pour être sûr qu’il est bien élémentaire, vérifier qu'il n'est pas décomposable par translation, qu'il n'a pas de centre de symétrie ni d'axe parallèle ou perpendiculaire à la direction de la frise.

Remarque importante : on peut démontrer qu’il n’y a qu’un petit nombre de possibilités pour l’ensemble des transformations laissant invariante une frise. En particulier, *quelle que soit la frise*, elle sera recomposable à partir du motif de base en utilisant **au maximum trois** transformations.

Une classification de tous les types de frises possibles est notamment décrite ici : https://fr.wikipedia.org/wiki/Groupe_de_frise



source : les images proviennent de Wikipédia (lien ci-dessus).